Varianta 053

Subiectul I

a) Aria triunghiului *ABC* este $S = \frac{7}{2}$.

b) Aria pătratului este $S = 1$.

c) $\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{25}$.

d) $\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$.

e) Ecuația căutată este: $3x + 4y - 25 = 0$.

f) Distanța de la punctul M la plan este $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Subiectul II

1.

a) $\left\{\frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{2}{2}\right\} + \left\{\frac{3}{2}\right\} = 1$.

b) $n = 10$.

c) $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(10) = 0$.

d) Restul împărțirii polinomului f la g este 5.

e) Probabilitatea căutată este $p = \frac{2}{3}$.

2.

a) $f(1) = 2$.

b) $f'(x) = 2007 \cdot x^{2006}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

c) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2007$.

d) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2.$

e) $\frac{1}{2007}$.

Subiectul III

a) Pentru $k = 2$ avem $A^2 = 0_2$, deci $A \in M$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se arată prin calcul direct.

d) Considerăm $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M \Rightarrow \exists k\in \mathbf{N}$, $k\geq 2$, $X^k=0_2 \Rightarrow \det(X)=0$.

Notăm $t=tr(X)=a+d$. Din **b)** obținem $X^2=t\cdot X$ (1)

Deducem că $O_2=X^k=t^{k-1}\cdot X$, deci $X=O_2$ sau $t=0$ şi apoi că $X^2=0_2$.

e) Considerăm $n\in \mathbf{N}$, $n\geq 2$.

Presupunem că există $Z\in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $Z^n=A$.

Avem că $Z^{2n}=A^2=0_2$, deci $Z\in M$. Din punctul **d)** rezultă că $Z^2=0_2$, deci $\forall n\in \mathbf{N}$, $n\geq 2$, avem că $Z^n=0_2\neq A$, contradicție.

f) Din punctul **e)** deducem că $A\notin \operatorname{Im} f$, deci f nu este surjectivă.

g) Considerăm $B\in M$. Obținem că $\det(I_2+B+B^2+...+B^{n-1})=\det(I_2+B)$.

Dacă $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, avem $\det(B)=-a^2-bc=0$, de unde deducem că $\det(I_2+B)=1-a^2-bc=1$.

Subiectul IV

a) $g'(x)=tg^2 x$, $\forall x\in(0,1)$.

b) Avem $g'(x)>0$, $\forall x\in(0,1)$, deci funcția g este strict crescătoare pe $(0,1)$.

c) Funcția g este strict crescătoare pe $(0,1)$, deci $g\left(\frac{1}{2n}\right)\leq g\left(\frac{1}{n+k}\right)\leq g\left(\frac{1}{n+1}\right)$, de unde rezultă concluzia.

d) Pentru $k\in \mathbf{N}^*$, funcția f este o funcție Rolle pe intervalul $[k, k+1]$, și din teorema lui Lagrange pe acest interval, există $t_k\in(k, k+1)$, astfel încât

$\frac{f(k+1)-f(k)}{k+1-k}=f'(t_k)$ $\forall x>0$, $\Leftrightarrow$ există $t_k\in(k,k+1)$, $\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{t_k}$

$t_k\in(k,k+1) \Leftrightarrow \frac{1}{k+1}<\frac{1}{t_k}<\frac{1}{k}$ şi obținem $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$.

e) Pentru $n\in \mathbf{N}^*$ avem $c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-(\ln(n+1)-\ln n)\overset{\mathbf{d)}}{<}0$, aşadar şirul $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este strict descrescător.

Dându-i lui k valori de la 1 la n în partea dreaptă a dublei inegalități din **d)** şi adunând relațiile, obținem $c_n>\ln(n+1)-\ln n>0$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

În concluzie, şirul este strict descrescător şi mărginit inferior, deci conform teoremei lui Weierstrass, el este convergent.

f) $c_{2n}-c_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}-\ln 2$.

Obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(c_{2n}-c_n)+\ln 2=\ln 2$.

g) Dându-i lui k valori de la 1 la n în dubla inegalitate din **c)** și adunând relațiile, găsim :

$$n\cdot tg\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\le a_n-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)\le n\cdot tg\frac{1}{n+1}-\frac{n}{n+1}$$

și trecând la limită, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ln 2$.